Fisica Matematica - terzo compitino
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 10 giugno 2013

• 1 $i)$ Sia $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e si consideri la mappa di $\mathbb{R}^4(\equiv \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2)$ in sè

$$\tilde{q}_1 = q_1, \qquad \tilde{q}_2 = q_2, \qquad\qquad \tilde{p}_1 = p_1 - f(q_1), \qquad \tilde{p}_2 = p_2.$$

Dimostrare che è una trasformazione canonica di opportuna valenza c (trovarla); determinare per essa una funzione generatrice F_2.

$ii)$ Considerare quindi l'Hamiltoniana

$$H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad\qquad H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p_1 - q_1^3\right)^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 q_2^2$$

ed usando opportunamente (cioè, per opportuna f) la trasformazione canonica del punto precedente si trasformi $H(q,p)$ in una più semplice Hamiltoniana $K(\tilde{q},\tilde{p})$ generante un ben noto sistema dinamico differenziale lineare facilmente integrabile. Si imposti in dettaglio la determinazione delle soluzioni dell'originale sistema dinamico relativo a H.

•2 (Variante A) Data una Lagrangiana $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si enunci e dimostri il Teorema/Principio Variazionale di Hamilton.

•2(Variante B) Data la Lagrangiana L relativa allo spazio di configurazioni $\mathbb{R}^N$,

$$L(q_{k+1},\ldots,q_\alpha,\ldots,q_N,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_i,\ldots,\dot{q}_N), \qquad \alpha = k+1,\ldots,N, \qquad i = 1,\ldots,N$$

enunciare e dimostrare il metodo di riduzione di Routh.

• 3 $i)$ Sia $\Phi^t_{X_H} : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ il flusso associato al campo vettoriale Hamiltoniano generato da un'Hamiltoniana $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N};\mathbb{R})$, si scrive: $y = \Phi^t_{X_H}(x) = y(t,x)$, e lo Jacobiano $J(t,x) = \frac{\partial y}{\partial x}(t,x)$. Dimostrare che il flusso $\Phi^t_{X_H}$ mappa insiemi misurabili $\Omega \subset \mathbb{R}^{2N}$ di 'dati iniziali' in insiemi di ugual misura (o volume $2N$-dim) $\Phi^t_{X_H}(\Omega) \subset \mathbb{R}^{2N}$.

$ii)$ Dimostrare che i diffeomorfismi di $\mathbb{R}^2(\equiv \mathbb{T}^*\mathbb{R}^1)$ in sè che preservano il volume, nel senso del punto $i)$, sono *esattamente* le trasformazioni canoniche 1-valenti di $\mathbb{R}^2(\equiv \mathbb{T}^*\mathbb{R}^1)$ in sè.

Soluzioni (traccia)

• 1 $i)$

$$J\mathbb{E}J^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial q_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial f}{\partial q_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

(il conto si può fare utilizzando il prodotto per blocchi 2×2) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$

pertanto: $c = 1$. Una funzione generatrice è

$$F_2(q, \tilde{p}) = q \cdot \tilde{p} + \int_{cost.}^{q_1} f(\lambda) d\lambda$$

con Hessiano $\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial \tilde{p}}$ uguale all'identità.

$ii)$ Data

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p_1 - q_1^3\right)^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 q_2^2$$

La F_2 di cui sopra con $f(q_1) = q_1^3$ trasforma H in

$$K(\tilde{q}, \tilde{p}) = \frac{1}{2}\tilde{p}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{p}_2^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 \tilde{q}_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 \tilde{q}_2^2$$

che sono due oscillatori armonici disaccoppiati. La trasformata mediante l'inversa

$$q_1 = \tilde{q}_1$$
$$q_2 = \tilde{q}_2$$
$$p_1 = \tilde{p}_1 + \tilde{q}_1^3$$
$$p_2 = \tilde{p}_2$$

dell'integrale generale degli osc. armonici $(i = 1, 2)$:

$$\tilde{q}_i(t, a_i, b_i) = a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t$$

$$\tilde{p}_i(t, a_i, b_i) = -a_i \omega_i \sin \omega_i t + b_i \omega_i \cos \omega_i t$$

dà la soluzione cercata.

• 3 $i)$ Il flusso di un sistema canonico è T.C. 1-valente, $c = 1$. Dunque: $|\det J(x,t)| \equiv 1$, e dato che per $t = 0$ si ha che $J = \mathbb{I}$, $\det J \equiv 1$; il t. del cambio delle variabili d'integrazione negli integrali multipli ci assicura l'invarianza cercata: $Vol(\Phi^t_{X_H}(\Omega)) = \int_{\Phi^t_{X_H}(\Omega)} d^{2N}y = \int_\Omega |\det J(x,t)| d^{2N}x = \int_\Omega d^{2N}x = Vol(\Omega)$.

$i)$

$$J\mathbb{E}J^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p} \\ \\ \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} - \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p} & -\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} + \frac{\partial\tilde{q}}{\partial q}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p} \\ \\ -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial q} + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial p} & -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial q} - \frac{\partial\tilde{p}}{\partial q}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \det J \\ \\ -\det J & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$